数理解析研究所講究録
895巻 1995年 44-66

Kazhdan-Lusztig conjecture for Kac-Moody Lie algebras

京大数理研 柏原正樹 (M. Kashiwara)
広島大理 谷崎俊之 (T. Tanisaki)

§0. 序

（有限次元半単純リー代数の）最高ウェイト加群の研究は、D. N. Verma によりはじめられ、70年代に入って Bernstein-Gelfand-Gelfand や Janzen らによる純代数的手法を用いた精力的な研究が行なわれた。その主な目標は、既約な最高ウェイト加群の指標を求めることであったが、これに関しては、1980年前後になってようやく新しい進展がもたらされた。まず Kazhdan-Lusztig [KL1] は、いわゆる Kazhdan-Lusztig 多項式を定義し、これを用いて指標の具体的な形を予想した（Kazhdan-Lusztig 予想）。続いて Beilinson-Bernstein [BB] および Brylinski-柏原 [BK] は、旗多様体上の D 加群を用いることにより、この予想を独立に証明した。

そこで今度は、Kac-Moody リー代数の既約最高ウェイト加群の

指標がどうなるかが問題になる。有限次元半単純リー代数の場合の指標公式の自然な拡張として，次の2つの場合の公式が考えられる。

(1) 最高ウェイトが支配的ウェイトとWeyl群共役な場合。

(2) 最高ウェイトが反支配的ウェイトとWeyl群共役な場合。

一般の無限次元 Kac-Moody リー代数では，支配的ウェイトと反支配的ウェイトはWeyl群共役ではないので，(1)と(2)は全く別の公式を与える。

(1)については，柏原(-谷崎)[K2]，[KT1](およびCasian [C1])により，対称化可能Kac-Moodyリー代数に対して成立することが示された。また(2)は，アフィン・リー代数について正しいことが，柏原-谷崎[KT3](およびCasian [C2])により証明された。なお，(2)は一般のKac-Moodyリー代数では成立せず，アフィン・リー代数(あるいは有限次元半単純リー代数)に限る必要がある。

本稿では，[K2]，[KT1]，[KT3]の結果を中心にその解説を行なう。なお，本文の文責は谷崎にあることを付言しておく。

§1. 指標公式

$\boxed{1.0}$ 記号の準備

$\mathfrak{g}$ を Kac-Moody リー代数，$\mathfrak{h}$ をその Cartan 部分代数，$\{\alpha_i\}_{i=1}^{n} \subset \mathfrak{h}^*$ を単純ルート系，$\{h_i\}_{i=1}^{n} \subset \mathfrak{h}$ を単純余ルート系とし，Δ をルート系，Δ^+ を正ルート系とする．また，各 $\alpha \in \Delta$ に対して，対応するルート空間を $\mathfrak{g}_\alpha$ で表わす．$i=1, \dots, n$ に対して，$e_i \in \mathfrak{g}_{\alpha_i}$，$f_i \in \mathfrak{g}_{-\alpha_i}$ を $[e_i, f_i] = h_i$ となるように選ぶ．$\mathfrak{g}$ の部分代数を

$$\mathfrak{n}^+ = \langle e_1, \dots, e_n \rangle \quad , \quad \mathfrak{n}^- = \langle f_1, \dots, f_n \rangle$$

$$\mathfrak{b}^+ = \langle e_1, \dots, e_n, \mathfrak{h} \rangle \quad , \quad \mathfrak{b}^- = \langle f_1, \dots, f_n, \mathfrak{h} \rangle$$

で定めるとき，

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{n}^- \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}^+ \quad , \quad \mathfrak{b}^\pm = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}^\pm$$

$$\mathfrak{n}^\pm = \bigoplus_{\alpha \in \Delta^+} \mathfrak{g}_{\pm\alpha}$$

が成立する．また $W \subset GL(\mathfrak{h}^*)$ を Weyl 群とする．すなわち，$i = 1, \dots, n$ に対して，$s_i \in GL(\mathfrak{h}^*)$ を

$$s_i(\lambda) = \lambda - \lambda(h_i)\alpha_i \qquad (\lambda \in \mathfrak{h}^*)$$

により定め，$W = \langle s_i \rangle_{i=1}^{n}$ とする．$S = \{s_i\}_{i=1}^{n}$ とおくとき，(W, S) は Coxeter 群になる．従って，各 $w \in W$ に対してその長さ $\ell(w) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ が定まる．また，W 上の Bruhat 順序を $\geq$ により表わす．

1.1 問題の説明

$\lambda\in\mathfrak{h}^*$ に対して，$\mathfrak{g}$加群 $M(\lambda)$ を次で定める：

$$M(\lambda) = U(\mathfrak{g}) \Big/ \Big(\sum_{h\in\mathfrak{h}} U(\mathfrak{g})(h-\lambda(h)1) + U(\mathfrak{g})\mathfrak{n}^+ \Big)$$

$$\cong U(\mathfrak{g})\otimes_{U(\mathfrak{b}^+)} \mathbb{C}_\lambda .$$

ここで $U(\mathfrak{g})$ は $\mathfrak{g}$ の包絡代数を表わす。また $\mathbb{C}_\lambda$ は

$$\mathbb{C}_\lambda = \mathbb{C}v_\lambda, \quad h\cdot v_\lambda = \lambda(h)v_\lambda \ (h\in\mathfrak{h}), \quad e_i v_\lambda = 0 \ (i=1,\cdots,n)$$

により定まる1次元 $\mathfrak{b}^+$加群である．$M(\lambda)$ はただ1つの極大真部分加群 $K(\lambda)$ を含む．従って商加群

$$L(\lambda) = M(\lambda)/K(\lambda)$$

は既約$\mathfrak{g}$加群になる．$M(\lambda)$ を最高ウェイト λ の Verma加群，$L(\lambda)$ を最高ウェイト λ の既約加群と呼ぶ．

一般に $\mathfrak{g}$加群 M と $\mu\in\mathfrak{h}^*$ に対して，

$$M_\mu = \{ m\in M \mid {}^\forall h\in\mathfrak{h}, {}^\exists N \ \text{s.t.} \ (h-\mu(h)\cdot 1)^N m = 0 \}$$

とおく．$\mathfrak{g}$加群 M であって，$M=\bigoplus_{\mu\in\mathfrak{h}^*} M_\mu$ かつ $\dim M_\mu<\infty$ $({}^\forall\mu\in\mathfrak{h}^*)$ をみたすものを一般ウェイト加群と呼び，その指標 $\mathrm{ch}(M)$ を形式的無限和

$$\mathrm{ch}(M) = \sum_{\mu\in\mathfrak{h}^*} (\dim M_\mu)\, e^\mu$$

として定める。$M(\lambda)$, $L(\lambda)$ は一般ウェイト加群なので，指標を考えることができる。

「**命題 1.1.1** $\lambda\in\mathfrak{h}^*$ に対し

$$\mathrm{ch}(M(\lambda))=\frac{e^{\lambda}}{\prod_{\alpha\in\Delta^+}(1-e^{-\alpha})^{\dim\mathfrak{g}_\alpha}}.$$」

ただし，シンボル e^{λ} は $e^{\lambda_1}e^{\lambda_2}=e^{\lambda_1+\lambda_2}$ をみたすものとし，$\dfrac{1}{1-e^{-\alpha}}$ は $\sum_{i=0}^{\infty}e^{-i\alpha}$ として解釈する。命題 1.1.1 は，$M(\lambda)$ が $U(\mathfrak{n}^-)$ 加群として階数 1 の自由加群であることから簡単に従う。

「**問題 1.1.2** (Verma) $\mathrm{ch}(L(\lambda))$ を求めよ。」

以下 $\mathfrak{h}^*$ の $\mathbb{Z}$ 束 P であって，

$$\langle P, h_i\rangle\subset\mathbb{Z}\quad,\ \alpha_i\in P\qquad(i=1,\cdots,n)$$

をみたすものをひとつ固定し，$\lambda\in P$ の場合に問題を考えることにする。

上の問題の解答としてよく知られているのは，Weyl-Kac の指標公式であるが，これについて説明しよう。

$\rho\in\mathfrak{h}^*$ であって，$\rho(h_i)=1$ $(i=1,\cdots,n)$ をみたすものを

ひとつとり，固定する．

$$P^+ = \{\lambda \in P \mid \lambda(h_i) \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \quad (i=1,\cdots,n)\}$$

$$= \{\lambda \in P \mid (\lambda+\rho)(h_i) \in \mathbb{Z}_{>0} \quad (i=1,\cdots,n)\}$$

$$P^- = \{\lambda \in P \mid (\lambda+\rho)(h_i) \in \mathbb{Z}_{<0} \quad (i=1,\cdots,n)\}$$

とおく．

「<u>定理 1.1.3</u>（Weyl－Kac の指標公式）

$\lambda \in P^+$ のとき

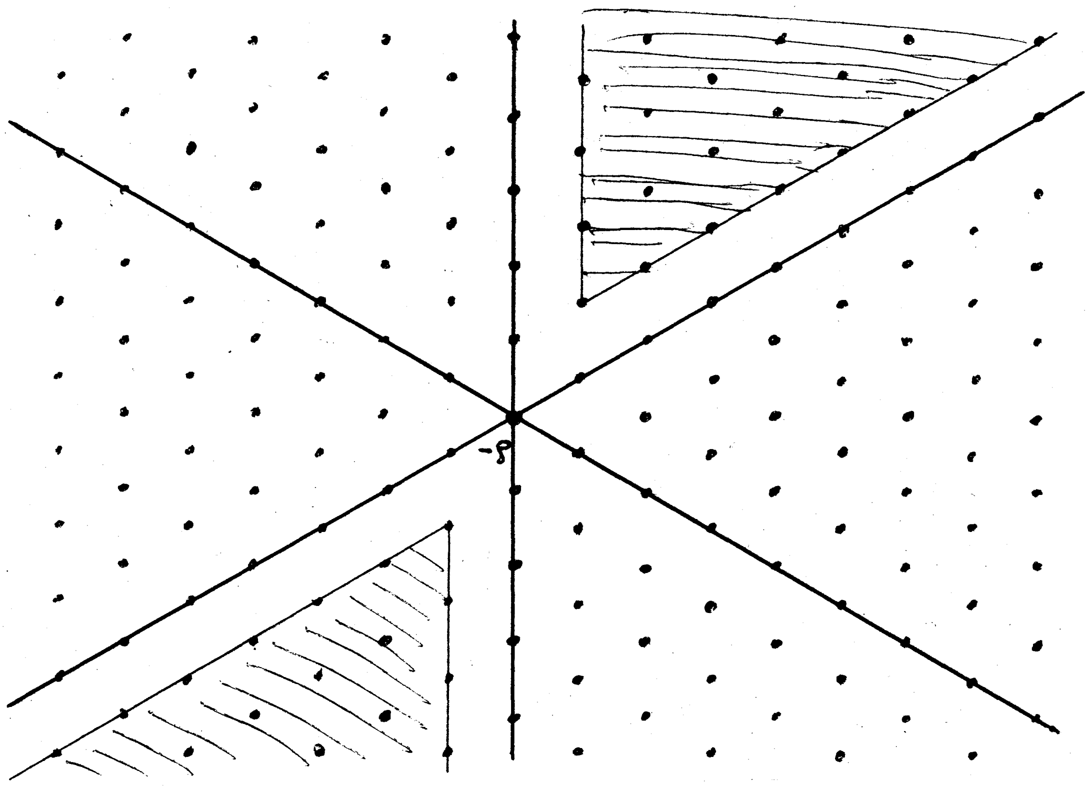
$$ch(L(\lambda)) = \sum_{w \in W} (-1)^{l(w)} ch(M(w(\lambda+\rho)-\rho))$$ 」

この公式にみえるように，以下 Weyl 群 W の $\mathfrak{h}^*$ への作用で原点を $-\rho$ にずらしたものが頻繁にでてくる．そこで記号を簡略化するために，

$$w \circ \lambda = w(\lambda+\rho) - \rho \qquad (w \in W,\ \lambda \in \mathfrak{h}^*)$$

とおく．

A_2 型の場合に絵をかくと，次のようになる．



この絵で，3本の直線（壁）に関するおり返しで生成される群が，Weyl群の$-\rho$だけずらした作用を与える．•がPの点，中のPの点の全体がP^+，中のPの点の全体がP^-である．

壁の上にあるPの点の全体を

$$P_{sing} = \{\lambda \in P \mid \lambda(h_i)=0 \ (\exists i=1,\dots,n)\}$$

とし，$P_{reg} = P - P_{sing}$ とおく．P^+, P^- は共に W の P_{reg} への（ずらした）作用に関する完全代表系を与えている．

1.2 有限次元半単純リー代数の場合

まず $\mathfrak{g}$ が有限次元の場合を考える。

$\lambda \in P_{sing}$ のときの $L(\lambda)$ の指標は, $\lambda \in P_{reg}$ のときのある種の極限として得られることが知られている (translation principle)。従って, $\lambda \in P_{reg}$ の場合を考えればよい。

「命題 1.2.1　$\operatorname{rank}\mathfrak{g} = n \leqq 2$ とする。

$\lambda \in P^-$, $w \in W$ のとき,

$$\begin{cases} ch(L(w\circ\lambda)) = \sum_{y \leqq w} (-1)^{\ell(w)-\ell(y)} \blacksquare\, ch(M(y\circ\lambda)) & \cdots ① \\ ch(M(w\circ\lambda)) = \sum_{y \leqq w} \blacksquare\, ch(L(y\circ\lambda)) & \cdots ② \end{cases}$$

$\lambda \in P^+$, $w \in W$ のとき,

$$\begin{cases} ch(L(w\circ\lambda)) = \sum_{y \geqq w} (-1)^{\ell(y)-\ell(w)} \blacksquare\, ch(M(y\circ\lambda)) & \cdots ③ \\ ch(M(w\circ\lambda)) = \sum_{y \geqq w} \blacksquare\, ch\, L(y\circ\lambda) & \cdots ④ \end{cases}$$

ここで $\blacksquare = 1$ とする。」

①と②は 公式

$$\sum_{y \leqq x \leqq w} (-1)^{\ell(x)-\ell(y)} = \delta_{y,w} \qquad (y \leqq w)$$

から同値なのである。また, W の最長元を w_0 とするとき, $w_0 \circ P^- = P^+$ と $y \leqq w \Longleftrightarrow y w_0 \geqq w w_0$ により, ③, ④ は

それぞれ①,② と同値である。よって上の①〜④はすべて同値な関係式を与える.

Verma の最初の期待は、これが一般の有限次元半単純リー代数について成立するのではないかというものであったが、実は、rank $\mathfrak{g} > 2$ のときには、▨に1より大きな数が入ることがあり、そう単純ではない. ▨の部分がいわゆる Kazhdan-Lusztig 多項式を使ってかけるというのが、Kazhdan-Lusztig 予想である. これを述べるために Kazhdan-Lusztig 多項式の定義を説明する.

$\boxed{1.3}$ Kazhdan-Lusztig 多項式

一般に (W, S) を Coxeter 系とする. $\{T_w\}_{w\in W}$ を基底とする自由 $\mathbb{Z}[q, q^{-1}]$ 加群

$$H(W) = \bigoplus_{w\in W} \mathbb{Z}[q, q^{-1}]\, T_w$$

上の結合代数の構造が,

$$\begin{cases} T_{w_1} T_{w_2} = T_{w_1 w_2} & (\ell(w_1) + \ell(w_2) = \ell(w_1 w_2)) \\ (T_s + 1)(T_s - q) = 0 & (s \in S) \end{cases}$$

により一意的に定まる $(T_e = 1)$. これを (W, S) の Hecke-岩堀代数と呼ぶ.

「 命題 1.3.1 (Kazhdan–Lusztig [KL1])

各 $w \in W$ に対して,

$$C_w = \sum_{y \leq w} P_{y,w}(q)\, T_y \in H(W) \qquad (P_{y,w}(q) \in \mathbb{Z}[q])$$

であって, 以下の条件をみたすものが一意的に定まる.

(a) $P_{w,w}(q) = 1$

(b) $y < w$ のとき $P_{y,w}(q) \in \mathbb{Z}[q^{-\frac{1}{2}}]\, q^{\frac{1}{2}(l(w)-l(y)-1)} \cap \mathbb{Z}[q]$

(c) $C_w = q^{+l(w)} \sum_{y \leq w} P_{y,w}(q^{-1})\, T_{y^{-1}}^{-1}$ 」

$P_{y,w}(q)$ を Kazhdan–Lusztig 多項式と呼ぶ. $|S| \leq 2$ ならば, 常に $P_{y,w}(q) = 1$ となる.

$\boxed{1.4}$ 有限次元半単純リー代数の場合 (続き)

再び, §1.3 の設定に戻る. 問題は命題 1.2.1. の ▨ の部分であったが, 答は次のとおり

「 定理 1.4.1 (Kazhdan–Lusztig 予想 [KL1]; Beilinson–Bernstein [BB], Brylinski–柏原 [BK]).

$\mathfrak{g}$ を有限次元半単純リー代数とする.

$\lambda \in P^-$, $w \in W$ のとき

$$
\begin{cases}
\mathrm{ch}(L(w\circ\lambda)) = \displaystyle\sum_{y \leqq w} (-1)^{\ell(w)-\ell(y)} P_{y,w}(1)\, \mathrm{ch}(M(y\circ\lambda)) & \cdots ①' \\
\mathrm{ch}(M(w\circ\lambda)) = \displaystyle\sum_{y \leqq w} P_{ww_0, yw_0}(1)\, \mathrm{ch}(L(y\circ\lambda)) & \cdots ②'
\end{cases}
$$

$\lambda \in P^+$, $w \in W$ のとき

$$
\begin{cases}
\mathrm{ch}(L(w\circ\lambda)) = \displaystyle\sum_{y \geqq w} (-1)^{\ell(y)-\ell(w)} P_{yw_0, ww_0}(1)\, \mathrm{ch}(M(y\circ\lambda)) & \cdots ③' \\
\mathrm{ch}(M(w\circ\lambda)) = \displaystyle\sum_{y \geqq w} P_{w,y}(1)\, \mathrm{ch}(L(y\circ\lambda)) & \cdots ④'
\end{cases}
$$

①'と②'は公式([KL1])

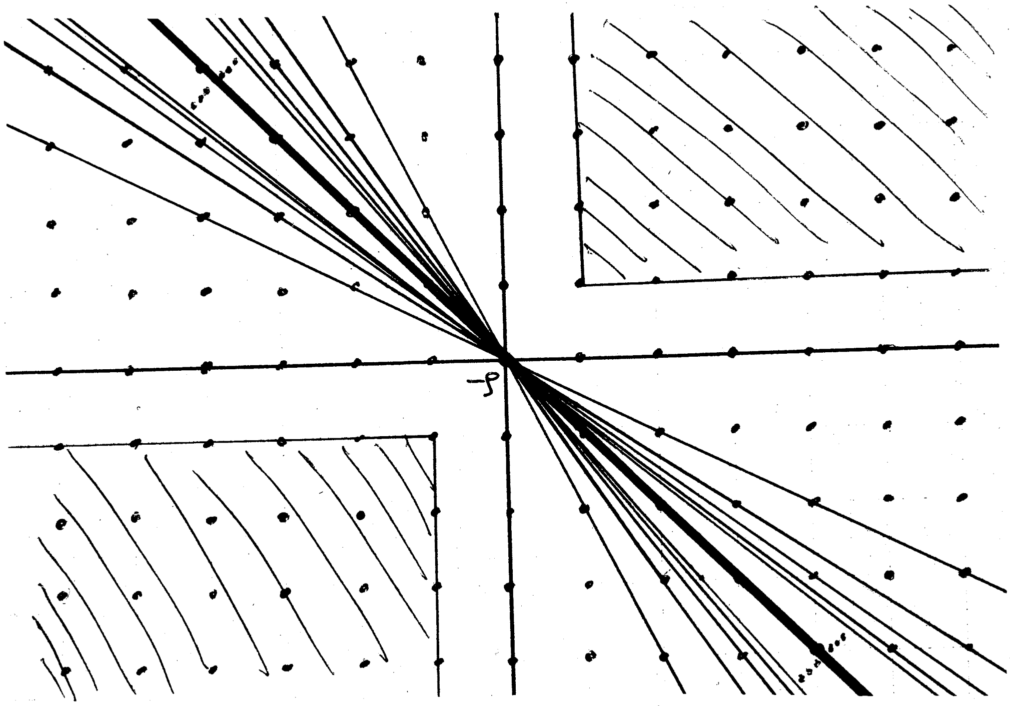
$$
\sum_{y \leqq x \leqq w} (-1)^{\ell(x)-\ell(y)} P_{y,x}(q)\, P_{ww_0, xw_0}(q) = \delta_{y,w}
$$

$$
(y \leqq w)
$$

から同値な式である。また命題1.2.1の場合と同じ理由により、③', ④'はそれぞれ①', ②'と同値である。従って、やはり、①'〜④'はすべて同値な公式となる。

$\boxed{1.5}$ Kac-Moody リー代数の場合

次に、一般のKac-Moodyリー代数の場合への拡張を考えよう。最も簡単な$A_1^{(1)}$の場合に§7のA_2と同様の絵をかいてみよう。



壁が無数にあるので全部は書けないが、

$$y=-\frac{n-1}{n}x,\ y=-\frac{n+1}{n}x\ (n=1,2,3,\cdots),\ x=0$$

がWeyl群のおり返しに関する壁で、他にその極限としての（別の意味の）壁 $y=-x$ がある。P^+（あるいは P^-）の点から出発してWeyl群の元を作用させると、壁をひとつひとつ越えて隣りの領域には移れるが、どこまで行っても真中のべルリンの壁 $y=-x$ を乗り越えることはできない。これはWeyl群が無限群で最長元 w_0 が存在しないことに起因する。

そこで、定理1.4.1を一般のKac-Moodyリー代数に拡張することを考えよう。w_0 が存在しないので、そのまま拡張できるのは、定理1.4.1の之式のうち ①′ と ④′ である。また I に

述べた理由により，①′と④′は一般のKac-Moodyリー代数では別の主張になる。

「<u>定理1.5.1</u>（柏原-谷崎 [K2], [KT1]，Casian [C1]）

$\mathfrak{g}$ を対称化可能Kac-Moodyリー代数とする。

$\lambda \in P^+$, $w \in W$ に対し

$$\mathrm{ch}(M(w\circ\lambda)) = \sum_{y \geq w} P_{w,y}(1)\, \mathrm{ch}(L(y\circ\lambda))$$
」

「<u>定理1.5.2</u>（柏原-谷崎 [KT3]，Casian [C2]）

$\mathfrak{g}$ をアフィン・リー代数とする。

$\lambda \in P^-$, $w \in W$ に対し

$$\mathrm{ch}(L(w\circ\lambda)) = \sum_{y \leq w} (-1)^{\ell(w)-\ell(y)} P_{y,w}(1)\, \mathrm{ch}(M(y\circ\lambda))$$
」

なお，定理1.5.1の場合の $\mathrm{ch}(L(w\circ\lambda))$ および定理1.5.2の場合の $\mathrm{ch}(M(w\circ\lambda))$ に関する公式は逆Kazhdan-Lusztig多項式を用いて書けるが，ここでは省略する。

§2. 旗多様体上のD加群

$\boxed{2.0}$ 本節では，定理1.4.1，定理1.5.1，定理1.5.2の証明の方針について述べる。考え方はどれも同じで，次の対応関係：

$$\boxed{\mathfrak{g}\text{加群}} \longleftrightarrow \boxed{\begin{array}{c}\text{旗多様体上の}\\ D\text{加群}\end{array}} \longleftrightarrow \boxed{\begin{array}{c}\text{旗多様体上の}\\ \text{偏屈層}\end{array}}$$

により，問題をSchubert多様体の交叉コホモロジー群の計算に帰着させる。

$\boxed{2.1}$ 定理1.4.1の証明について

$\mathfrak{g}$を有限次元半単純リー代数とする。$\mathfrak{g}$に対応する連結な代数群をGとし，B^+, B^-をそれぞれ$\mathfrak{b}^+$, $\mathfrak{b}^-$に対応するGの部分群とする。このとき，$X = G/B^-$をGの旗多様体と呼ぶ。
一般に滑らかな代数多様体Yに対して，Yの構造層を$\mathcal{O}_Y$，Y上の微分作用素の層を$D_Y \subset \mathcal{E}nd_{\mathbb{C}}(\mathcal{O}_Y)$であらわす。
旗多様体XにはGが作用しているので，これから環準同型

$$U(\mathfrak{g}) \longrightarrow \Gamma(X; D_X) \qquad (a \in \mathfrak{g} \mapsto \partial_a)$$

が，

$$(\partial_a f)(x) = \frac{d}{dt} f(\exp(-ta)x)\Big|_{t=0} \qquad (a \in \mathfrak{g},\ f \in \mathcal{O}_X,\ x \in X)$$

により定まる．従って(左)D_X加群$\mathcal{M}$に対し$U(\mathfrak{g})$加群$\Gamma(X;\mathcal{M})$が定まる．また$U(\mathfrak{g})$加群Mに対しD_X加群$D_X \otimes_{U(\mathfrak{g})} M$が定まる．

「定理2.1.1 (Beilinson－Bernstein [BB])
次の圏同値が成立する．

$$\left\{\begin{array}{l} U(\mathfrak{g})\text{加群であって,} \\ \text{1次元の自明な加群と} \\ \text{同じ中心指標をもつもの} \end{array}\right\} \overset{\sim}{\longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{l} \text{左}D_X\text{加群であって,} \\ \mathcal{O}_X\text{加群として} \\ \text{準連接的なもの} \end{array}\right\}$$

$$M \rightsquigarrow D_X \otimes_{U(\mathfrak{g})} M$$

$$\Gamma(X;\mathcal{M}) \leftarrow\!\!\!\sim \mathcal{M}$$
」

なお，[BK]においては，これより弱い形の圏同値が示されている．

$w \in W$に対し，$U(\mathfrak{g})$加群$M(w \circ 0)$，$L(w \circ 0)$は1次元の自明な$\mathfrak{g}$加群と同じ中心指標をもつので，これらに対応しD_X加群

$$\mathcal{M}_w = D_X \otimes_{U(\mathfrak{g})} M(w \circ 0)$$
$$\mathcal{L}_w = D_X \otimes_{U(\mathfrak{g})} L(w \circ 0)$$

が定まる．

このとき，定理1.4.1の④′を（$\lambda=0$のときに）証明するには，左D_X加群の圏のGrothendieck群における等式

$$[\mathcal{M}_w] = \sum_{y \geq w} P_{w,y}(1)\,[\mathcal{L}_y]$$

を示せばよい．そのためには，$\mathcal{M}_w$, $\mathcal{L}_w$ がどのようなD_X加群であるかを考える必要がある．$w \in W$に対し

$$X^w = B^+ w B^- / B^- \subset X$$

とおく．このとき，次はよく知られている．

「<u>命題2.1.2</u>

(i) X^wはXの局所閉部分多様体．

(ii) $X = \bigsqcup_{w \in W} X^w$.

(iii) $X^w \simeq \mathbb{C}^{\dim X - \ell(w)}$.

(iv) $\overline{X^w} = \bigsqcup_{y \geq w} X^y$.」

そこで，

「<u>定理2.1.3</u> ([BB], [BK]) $w \in W$とすると

$$\mathcal{M}_w = \left(\mathcal{H}^{\ell(w)}_{X^w}(\mathcal{O}_X)\right)^*, \quad \mathcal{L}_w = \mathrm{Image}(\mathcal{M}_w \longrightarrow \mathcal{M}_w^*)$$」

ここで，$\mathcal{H}^{l(w)}_{X^w}$ は X^w に台をもつ $l(w)$ 次の局所コホモジー層をとる関手である。$\mathcal{O}_X$ は自然に左D_X加群なので $\mathcal{H}^{l(w)}_{X_w}(\mathcal{O}_X)$ も自然にD_X加群になるが，さらにこれは正則ホロノミー左D_X加群になる。（正則）ホロノミーD_X加群の圏では，双対関手 $\mathcal{M} \mapsto \mathcal{M}^*$ が，

$$\mathcal{M}^* = \mathcal{E}xt^{\dim X}_{D_X}(\mathcal{M}, D_X) \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega_X^{*}$$

により定まる。従って $\mathcal{M}_w$ も正則ホロノミーD_X加群である。また$\mathcal{M}_w, \mathcal{M}_w^*$が正則ホロノミー左$D_X$加群なので，$\mathcal{L}_w$も正則ホロノミー$D_X$加群である。$\partial X^w = \overline{X^w} - X^w$ とおくとき，$\mathcal{M}_w|X-\partial X^w \cong \mathcal{L}_w|X-\partial X^w$ で，これは X^w に台をもつデルタ関数のみたす微分方程式になる。

一般にYを$\mathbb{C}$上の滑らかな代数多様体とするとき，正則ホロノミーD_Y加群の圏とY上の偏屈層の圏の反圏同値

$$Sol : \{\text{正則ホロノミー}D_Y\text{加群}\} \to \{Y\text{上の偏屈層}\}$$

が

$$Sol(\mathcal{M}) = \mathbb{R}\mathcal{H}om_{D_Y}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_Y)$$

(Rieman-Hibert 対応)

により定まる。従って，我々の考える問題は，D加群の問題からさらに偏屈層の問題に翻訳できる．Rieman-Hilbert

対応の一般論により

$$Sol(\mathcal{M}_w) = (\mathbb{C}_{X^w}[-\ell(w)])^*, \quad Sol(\mathcal{L}_w) = {}^{\pi}\mathbb{C}_{X^w}[-\ell(w)].$$

従って、定理1.4.1の④′でλ=0の場合、主張は次から従う。

「定理2.1.4（[KL2]）偏屈層の圏のGrothendieck群において、

$$[\mathbb{C}_{X^w}[-\ell(w)]] = \sum_{y \geq w} P_{w,y}(1)\,[{}^{\pi}\mathbb{C}_{X^y}[-\ell(y)]]$$

$([\mathbb{C}_{X_w}[-\ell(w)]] = [(\mathbb{C}_{X^w}[-\ell(w)])^*]$ に注意$)$」

この定理は定理1.4.1の証明以前に知られていたものである。

定理1.4.1でλが一般の場合は、translation principleにより、λ=0の場合に帰着できる。あるいは、ねじれ D_X 加群を使えば、上と全く同様の議論により証明することもできる。

$\boxed{2.2}$ Kac-Moodyリー代数の旗多様体

Kac-Moodyリー代数に対して、定理1.4.1の証明で述べた議論を適用しようとすると、まずその旗多様体を構成しなければならない。これについて解説する。

以下 $\mathfrak{g}$ をKac-Moodyリー代数とする。

まず群スキーム H, N^+, N^-, B^+, B^- を次で定める:

$$H = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[P]),$$

$$N^{\pm} = \varprojlim_{k} \exp(\mathfrak{n}^{\pm}/(\mathrm{ad}\,\mathfrak{n}^{\pm})^{k}\mathfrak{n}^{\pm}),$$

$$B^{\pm} = (H \text{ と } N^{\pm} \text{ の半直積}).$$

Hは有限次元であるが, $N^{\pm}$, $B^{\pm}$ は無限次元である. $\mathfrak{g}$が有限次元の場合, 対応する代数群の座標環は包絡環 $U(\mathfrak{g})$ のある種の双対として捉えることができるが, この方法で, $\mathfrak{g}$が一般のKac-Moody リー代数の場合もスキーム G を構成することができる(詳細略). G は群スキームではないが, B^+ の左からの局所自由な作用と B^- の右からの局所自由な作用をもつ. このとき, $\mathfrak{g}$ の旗多様体を商多様体

$$X = G/B^- \qquad ([K1])$$

として定義することができる. また, $\mathfrak{g}$が有限次元のときの B^+wB^-/B^-, B^-wB^-/B^- の類似物 X^w, X_w が X の局所閉部分多様体として定義され, 次が成立する.

「<u>命題 2.2.1</u> ([K1])

(i) $X = \bigsqcup_{w \in W} X^w$

(ii) $X^w \simeq \mathbb{C}^{\infty}$ で $\mathrm{codim}\, X^w = l(w)$

(iii) $\overline{X^w} = \bigsqcup_{y \geq w} X^y$ 」

「<u>命題 2.2.2 ([KT3])</u>

(i) $\bigcup_{w\in W} X_w = \bigsqcup_{w\in W} X_w \subset X$.

(ii) $X_w \simeq \mathbb{C}^{l(w)}$.

(iii) $\overline{X_w} = \bigsqcup_{y\leqq w} X_y$ 」

ただし，無限変数の多項式環 $\mathbb{C}[x_i \mid i\in\mathbb{N}] = \varinjlim_n \mathbb{C}[x_1,\cdots,x_n]$ に対して，$\mathbb{C}^\infty = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[x_i \mid i\in\mathbb{N}]) = \varprojlim_n \mathbb{C}^n$ とおく。旗多様体 X は無限次元ではあるが，局所的には $\mathbb{C}^\infty$ と同型なよいスキームである。

2.3 定理1.5.1, 1.5.2 の証明

$\mathfrak{g}$ を Kac-Moody リー代数とする。まず定理1.5.1の証明について述べる。X を $\mathfrak{g}$ の旗多様体とする。X はよい無限次元スキームなので，そのうえで（正則ホロノミー）D_X 加群の理論を展開することができる。有限次元の場合と同様に，$w\in W$ に対して

$$\mathcal{M}_w = (\mathcal{H}^{l(w)}_{X_w}(\mathcal{O}_X))^*,\quad \mathcal{L}_w = \mathrm{Image}(\mathcal{M}_w \longrightarrow \mathcal{M}_w^*)$$

とおくとき，これらは正則ホロノミーな D_X 加群になる。

W の有限部分集合 F が，条件

$$w\in F,\ y\in W \Rightarrow y\in F$$

をみたすとき，F を可容的集合という。このとき，

$$X^F = \coprod_{w\in F} X^w$$

は X の準コンパクトな開集合である。$w\in F$ のとき、$\mathcal{M}_w|X^F$ および $\mathcal{L}_w|X^F$ は正則ホロノミー $\mathcal{D}_{X^F}$ 加群で、さらに $\mathcal{L}_w|X^F$ は既約になる。また $\mathcal{M}_w|X^F$ は有限な組成列をもち、各組成因子は、ある $y\in F$ に対する $\mathcal{L}_y|X^F$ と同型である。有限な組成列をもつ正則ホロノミーな $\mathcal{D}_{X^F}$ 加群であって、組成因子がある $y\in F$ に対する $\mathcal{L}_y|X^F$ と同型になるもののなす圏を $\mathbb{M}_0^F$ とかく。このとき、正則ホロノミーな $\mathcal{D}_X$ 加群 $\mathcal{M}$ であって、任意の可容的集合 F について $\mathcal{M}|X^F\in \mathrm{Ob}(\mathbb{M}_0^F)$ となるものの圏を $\mathbb{M}_0$ とすると、$\mathbb{M}_0=\varprojlim_F \mathbb{M}_0^F$ となる。そこで、$\mathcal{M}\in \mathrm{Ob}(\mathbb{M}_0)$ に対して、$\hat{H}^n(X;\mathcal{M})$ を次で定める。$H^n(X^F;\mathcal{M})$ は自然に $\mathfrak{h}$ 加群であるが、ウェイト空間 $H^n(X^F;\mathcal{M})_\mu$ は十分大きな F のとり方によらない。これを $\hat{H}^n(X;\mathcal{M})_\mu$ とかき、$\hat{H}^n(X;\mathcal{M})$ を

$$\hat{H}^n(X;\mathcal{M}) = \bigoplus_{\mu\in P} \hat{H}^n(X;\mathcal{M})$$

とおく。このとき、$\hat{H}^n(X;\mathcal{M})$ は自然に $\mathfrak{g}$ 加群になる。

定理 2.3.1 ([K2])

(i) 任意の $\mathcal{M}\in\mathbb{M}_0$ に対して $\hat{H}^n(X;\mathcal{M})=0$ $(n>0)$.

(ii) $\hat{H}^0(X;\mathcal{M}_w) \simeq M(w\circ 0)$

(iii) $\hat{H}^0(X;\mathcal{L}_w) \simeq L(w\circ 0)$.

定理1.5.1 は，この定理と $\overline{X^w}$ の交叉コホモロジー群の計算 ([KT1]) から従う。

定理1.5.2 も同じ思想のもとで証明されるが，基本的に異なる点のみについて注意しておく。旗多様体としては，$X = G/B^-$ でなく，G の定義において B^+ と B^- の役割をいれかえてできるスキーム G' を B^+ でわったもの $X' = G'/B^+$ を用いる。また Schubert セル X^w のかわりに B^+wB^+/B^+ の類似物 $X'_w \cong \mathbb{C}^{\ell(w)}$ を用いる。さらに左 D 加群ではなく，右 D 加群を用いる（無限次元多様体上では左 D 加群と右 D 加群は全くの別物）。その他の詳細は略す。

文献

[BB] A. Beilinson, J. Bernstein, localisation de $\mathfrak{g}$-modules, C. R. Acad. Sci. Paris, **292** (1981), 15-18.

[BK] J.-L. Brylinski, M. Kashiwara, Kazhdan-Lusztig conjecture and holonomic systems, Invent. Math., **64** (1981), 387-410.

[C1] L. Casian, Kazhdan-Lusztig multiplicity formulas for Kac-Moody algebras, C. R. Acad. Sci. Paris, **310** (1990), 333-337.

[C2] L. Casian, Kazhdan-Lusztig conjecture in the negative level case (Kac-Moody algebras of affine type), preprint.

[DGK] V. V. Deodhar, O. Gabber, V. Kac, Structure of some categories of representations of infinite dimensional Lie algebras, Adv. in Math., **45** (1982), 92-116.

[J] J. C. Jantzen, Moduln mit einem höchsten Gewichit, Lecture Notes in Math. **750**, Springer Verlag, 1979.

[Kac] V. Kac, Infinite dimensional Lie algebras (3rd ed.), Cambridge Univ. Press, 1990.

[KK] V. Kac, D. Kazhdan, Structure of representations with highest weight of infinite dimensional Lie algebras, Adv. Math., **34** (1979), 97-108.

[K1] M. Kashiwara, The flag manifold of Kac-Moody Lie algebra, Algebraic Analysis , Geometry, and Number Theory, supplement of Amer. J. Math., Johns Hopkins Univ. Press, Baltimore, 1989, 161-190.

[K2] M. Kashiwara, Kazhdan-Lusztig conjecture for symmetrizable Kac-Moody Lie algebras,
Progress in Math. **87**, Birkhäuser, 1991, 407-433.

[KT1] M. Kashiwara, T. Tanisaki, Kazhdan-Lusztig conjecture for symmetrizable Kac-Moody Lie algebras II, Progress in Math. **92**, Birkhäuser, 1990, 159-195.

[KT2] M. Kashiwara, T. Tanisaki, Characters of the negative level highest-weight modules for affine Lie algebras, Intern. Math. Res. Notices. (1994), 151-160.

[KT3] M. Kashiwara, T. Tanisaki, Kazhdan-Lusztig conjecture for affine Lie algebras with negative level, Duke Math. J. in press.

[KL1] D. Kazhdan, G. Lusztig, Representations of Coxeter groups and Hecke algebras, Invent. Math. **53** (1979), 165-184.

[KL2] D. Kazhdan, G. Lusztig, Schubert varieties and Poincaré duality, Proc. Symp. in Pure Math., **36** (1980), 185-203.